ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS

GUÍA RESUMIDA DE

CÁLCULO DIFERENCIAL CON

JORGE LUIS VILLALBA ACEVEDO [1]

Fundación Universitaria Colombo Internacional
Cartagena , Colombia.

[1]Magister en Estadística Aplicada Universidad del Norte. E-mail: jlvillalba@unicolombo.edu.co. Web site: https://jlvia1191.wixsite.com/easymath. You tube:JORGE LUIS VILLALBA ACEVEDO

ÍNDICE GENERAL

El autor

JORGE LUIS VILLALBA ACEVEDO.

Matemático, Especialista de la Universidad de Cartagena y Magister en Estadistica aplicada de Universidad del Norte.

CAPÍTULO 1

FUNCIONES Y GRÁFICAS

1.1. Definición de Función

El concepto de función es una de las ideas fundamentales en matemáticas. Casi cualquier estudio que se refiera a la aplicación de las matemáticas a problemas prácticos,o que requiera el análisis de datos empíricos, emplea este concepto matemático.

Una función expresa la idea de que una cantidad depende o está determinada por otra. Los ejemplos siguientes aclaran esta idea:

1. El área de un círculo depende de la longitud de su radio; si se conoce la longitud del radio, podemos determinar el área. Decimos que el área es una función del radio.
2. El costo semanal de producir cualquier artículo depende del número de artículos producidos. Decimos que el costo es una función del número de artículos.
3. La cantidad de cierto artículo que el fabricante ofrecerá depende del precio que pueda lograr. La cantidad es una función del precio.

Definición 1.1. Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Una **función** de X en Y es una regla que se asigna a cada elemento $x \in X$ una única $y \in Y$. Si una función asigna.

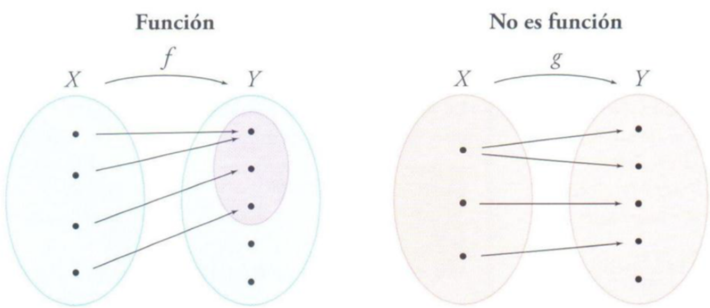


Figura 1.1: Diagrama Sagital

Nota 1.1.
- Decimos que "y es una imagen de x " , lo que en forma simbólica escribimos como $y = f(x)$. Se lee "y es igual a f de x "

- la letra x es la **variable independiente** que representa el valor de entrada de f, mientras que y es la **variable dependiente o variable de salida** de f en x.
- Las funciones se representaran con letras minúsculas como:$f, g, h, ..$ y los conjuntos se representaran con letras mayúsculas como $A, B, C, ...$

Definición 1.2. El **Dominio** de una función f es el conjunto de partida,esto es, son todos los $x \in X$ para el cual f le asigna un único elemento $y \in Y$ y se denota como Dom_f.

Definición 1.3. (Codominio o Contradominio) El **Codominio** de una función f es el conjunto de llegada Y ,esto es, de todos los posibles valores que puede tomar y o $f(x)$ y se denorá como cod_f.

Definición 1.4. (Rango o Recorrido) El **Rango** de una función f es el conjunto de todos las imágenes $y \in Y$ para el cual $y = f(x)$ y se denota como Ran_f

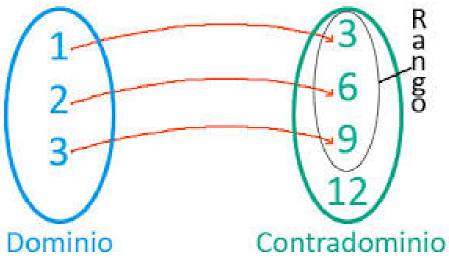


Figura 1.2: Diagrama Sagital

Definición 1.5. Si f es una función definida como $f : A \to \mathbb{R}$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces, se dice que la función es **real** o de **variable real**.

Definición 1.6. Una **relación R** de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto de parejas ordenadas del producto cartesiano entre A y B, $A \times B$, que cumplen con una característica particular S.

$$R = \{(x, y) \in A \times B : S(x, y)\}$$

Nota 1.2. Una **función** es un tipo particular de relación. De ahí, que **toda función es una relación, pero no toda relación es una función**.

1.2. Representación de funciones

Una función se puede representar mediante la expresión verbal, la expresión algebraica, la tabla de valores o la representación gráfica.

Definición 1.7. (Expresión verbal) Es la descripción de una función por medio de palabras. Es decir, mediante una oración o una frase se explica cómo una variables depende de otra.

Definición 1.8. (Expresión algebraica) Es la formula o ecuación mediante la cual se expresa una función. La conforman las constantes, la variable dependiente y la independiente, y se utiliza la ecuación $y = f(x)$.

Definición 1.9. (Tabla de valores) Es un arreglo de dos filas o dos columnas, en donde se escriben los valores de la variable independiente en la primera fila o columna, y sus respectivas imágenes en la segunda.

Definición 1.10. (Representación gráfica) Es la representación en el plano cartesiano de los pares ordenados o *grafo de la función*.

Nota 1.3. Cualquier curva dada (o conjunto de puntos) en el plano xy es la gráfica de una función (en la cual y es la variable dependiente) con tal de que cualquier línea vertical corte a la gráfica en a lo más un punto.

1.3. Propiedades de las funciones

Las funciones pueden tener diversas propiedades, las cuales facilitan su análisis y solución en muchos problemas de aplicación.

Definición 1.11. (Función inyectiva) Una función f es **inyectiva** o uno a uno si para todo par de elementos diferentes del dominio, sus imágenes son diferentes. Esto es, ningún elemento del conjunto de llegado es imagen de dos elementos diferentes del dominio.

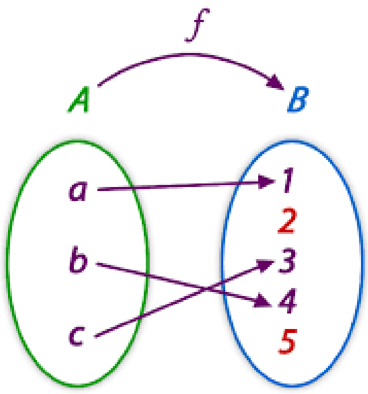


Figura 1.3: Diagrama Sagital Función Inyectiva

Nota 1.4. Si $x_1, x_2 \in A$ son tales que $x_1 \neq x_2$, entonces, $f(x_1) \neq f(x_2)$

Definición 1.12. (Función sobreyectiva) Una función f es **sobreyectiva** cuando el rango es igual al conjunto de llegada. Es decir, cuando todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de por lo menos un elemento del dominio.
Nota 1.5. f es sobreyectiva si $Cod_f = Ran_f$

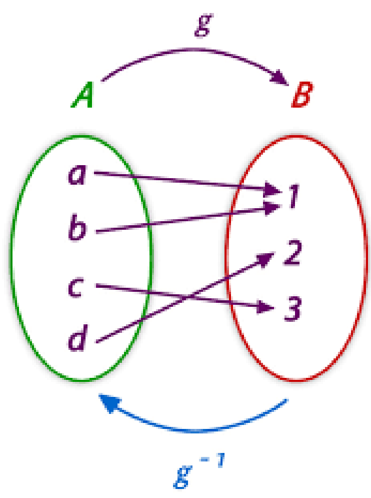


Figura 1.4: Daigrama Sagital Función Sobreyectiva

Definición 1.13. (Función biyectiva)

Una función f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva. Es decir, cuando todos y cada uno de los elementos del de llegada es imagen a lo sumo de un elemento del conjunto de partida.

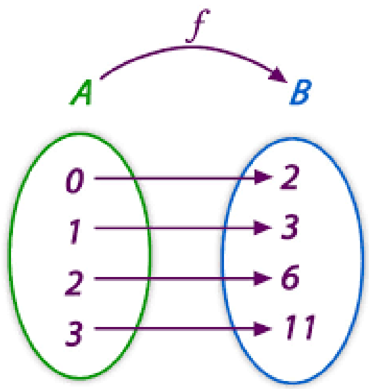


Figura 1.5: Daigrama Sagital Función Biyectiva

Definición 1.14. (Función par e impar)

Una función $y = f(x)$ es una

Función par de x si $f(-x) = f(x)$
Función impar de x si $f(-x) = -f(x)$

para toda x en el dominio de la función.

Ejemplo 1.1.
- $f(x) = x^2$ Función par: $(-x)^2 = x^2$ para toda x ; simetría con respecto al eje y .
- $f(x) = x^2 + 1$ Función par: $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ para toda x ; simetría con respecto al eje y.
- $f(x) = x$ Función impar: $(-x) = -x$ para toda x; simetría con respecto al origen.
- $f(x) = x + 1$ No es impar: $f(-x) = -x + 1$, pero $f(x) = -x - 1$. No son iguales. No es par: $(-x) + 1 \neq x + 1$, para toda $x \neq 0$.

Definición 1.15. Función creciente y decreciente
Sea f una función definida en un intervalo I y sean x_1 y x_2 cualesquiera dos puntos en I.

1. Si $f(x_2) > f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$, entonces se dice que f es **creciente** en I.
2. Si $f(x_2) < f(x_1)$, siempre que $x_1 > x_2$, entonces se dice que f es **decreciente** en I.

Definición 1.16. (Función periódica) Una función f es **periódica**, si $f(x) = f(x + p)$.

1.4. Clasificación de las funciones

Las funciones reales se clasifican en: funciones polinómicas, funciones racionales, funciones radicales, funciones trascendentes y funciones especiales.

$$\textbf{clases de funciones}\begin{cases}\text{Polinómicas.}\\ \text{Racional.}\\ \text{Radical.}\\ \text{Trascendente.}\\ \text{Especiales.}\end{cases}$$

Ademas, las funciones *Trascendente* se dividen de la siguiente manera

$$\textbf{Funciones trascendente}\begin{cases}\text{Exponencial.}\\ \text{Logarítmica.}\\ \text{Trigonométrica.}\end{cases}$$

y las *Especiales* en:

$$\textbf{Funciones especiales}\begin{cases}\text{Valor absoluto.}\\ \text{Parte entera.}\\ \text{A torzos.}\end{cases}$$

Como graficar en

```
GRÁFICA DE FUNCIONES CON R- PROJECT.
plot(x, y, ...)
```

1.4.1. Funciones polinómicas

Una **Función polinómica** es aquella que tiene la forma

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

con $a_n \neq 0, n \in \mathbb{Z}^+$ y $a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, 1, 2, 3, ..., n$

$a_0, a_1, ..., a_n$ son constantes y n un entero no negativo

- $Dom_g = \{\mathbb{R}\}$
- $Ran_g = \{\mathbb{R}\}$

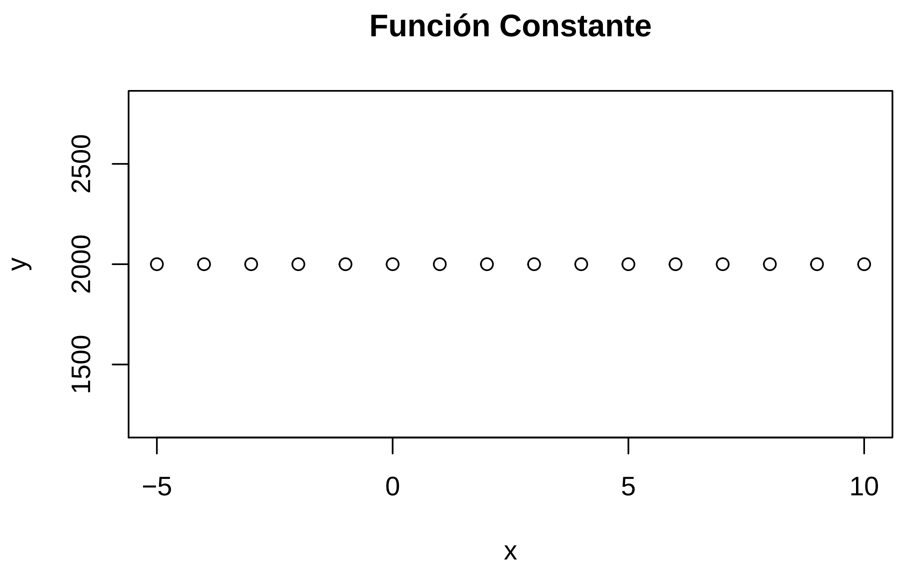
Función constante

Es toda función de la forma $g(x) = k$, donde $k \in \mathbb{R}$

- $Dom_g = \{\mathbb{R}\}$
- $Ran_g = \{k\}$

Ejemplo:

```
> x = seq(-5,10) # Dominio de la función.
> y = rep(2000,length(x))  # Función Constante .
> plot(x,y, main ="Función Constante")
>
```



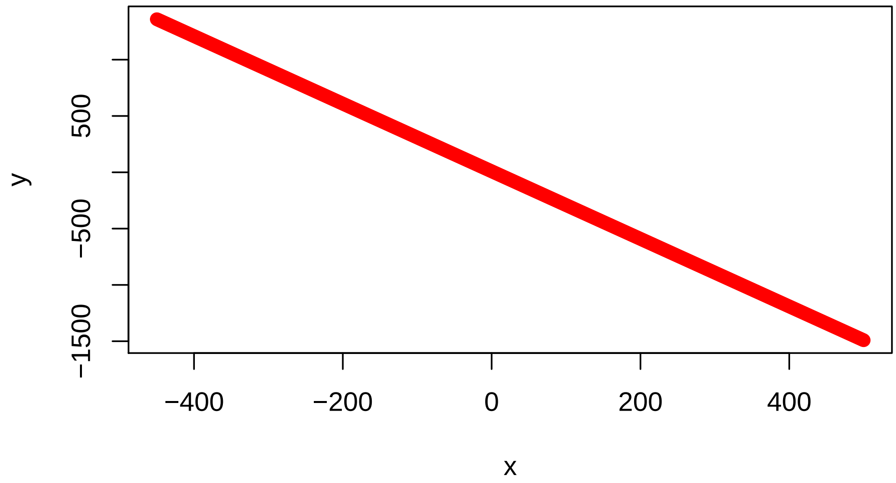
Función lineal

Es toda función de la forma $y = f(x) = mx + b$, donde $m, b \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$

- $Dom_f = \{\mathbb{R}\}$
- $Ran_f = \{\mathbb{R}\}$

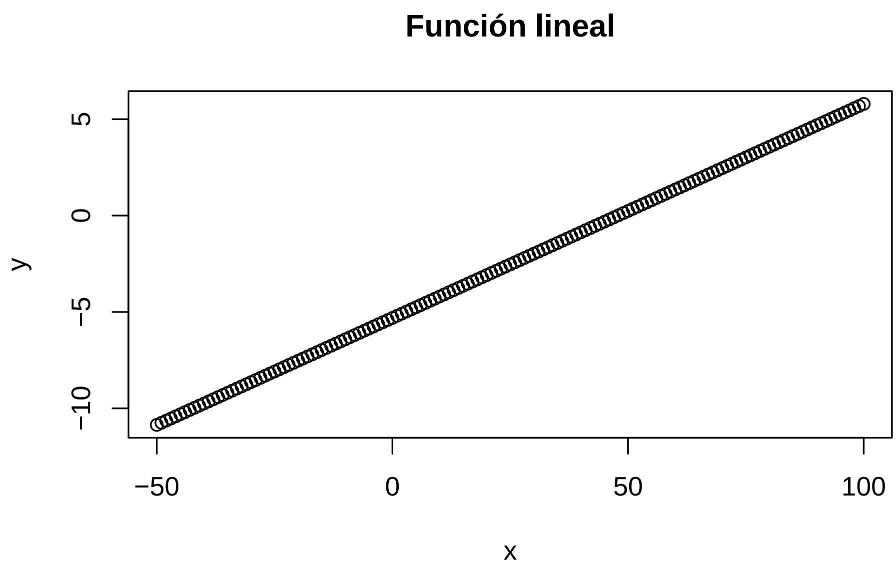
Ejemplo:

```
> x = -450: 500 # Dominio de la función.
> y = -3*x + 9    # función lineal.
> plot(x,y, col="red" )
```



Ejemplo:

```
> x <- seq(-50,100)
> y = -5.309 + 0.111*x
> plot(x,y,main="Función lineal")
```



Función cuadrática

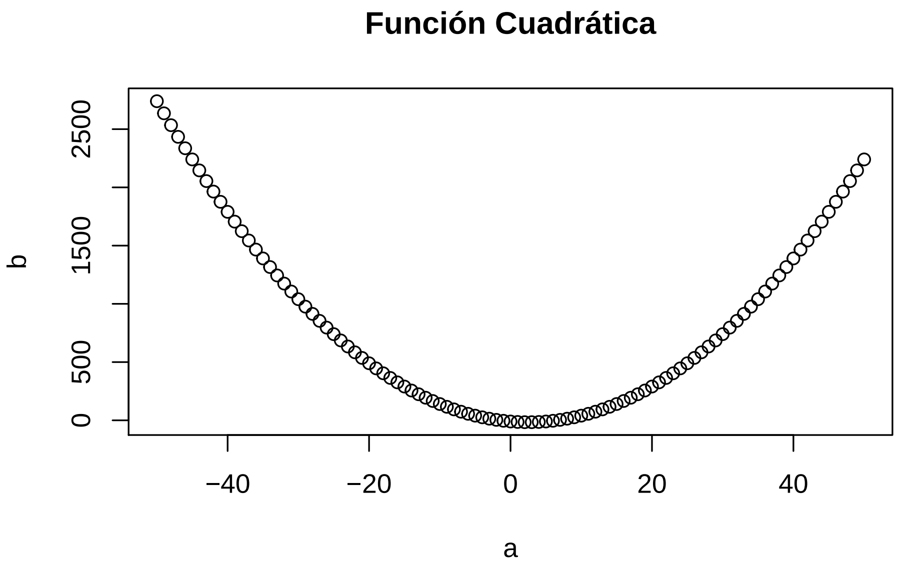
Es toda función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$

- $Dom_f = \{\mathbb{R}\}$

- $$Ran_f = \begin{cases} [f(-\frac{b}{2a}), +\text{ínf}), \text{ Si } a > 0 \\ (-\text{ínf}, f(-\frac{b}{2a})], \text{ Si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

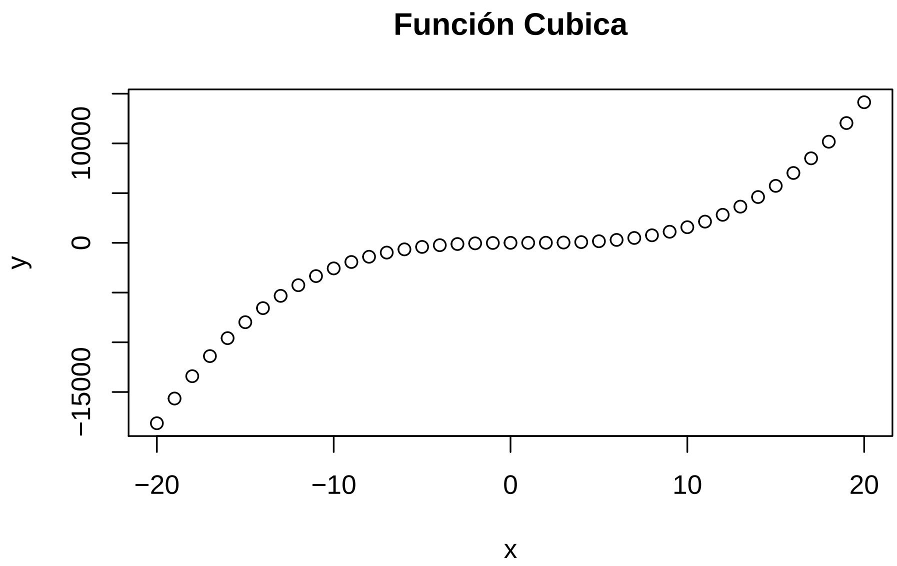
```
> a <- -50:50
> b <- a ^2 -5*a - 10
> plot(a,b,main="Función Cuadrática")
```



En forma análoga, una función polinomial de grado 3 se conoce como función cúbica. Por ejemplo, la función definida por $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 1$ y su gráfica es

Ejemplo:

```
> x <- -20:20
> y <- 2*x^{3} - 5*x^{2} + 7*x + 1
> plot(x,y,main="Función Cubica")
```



Funciones racionales

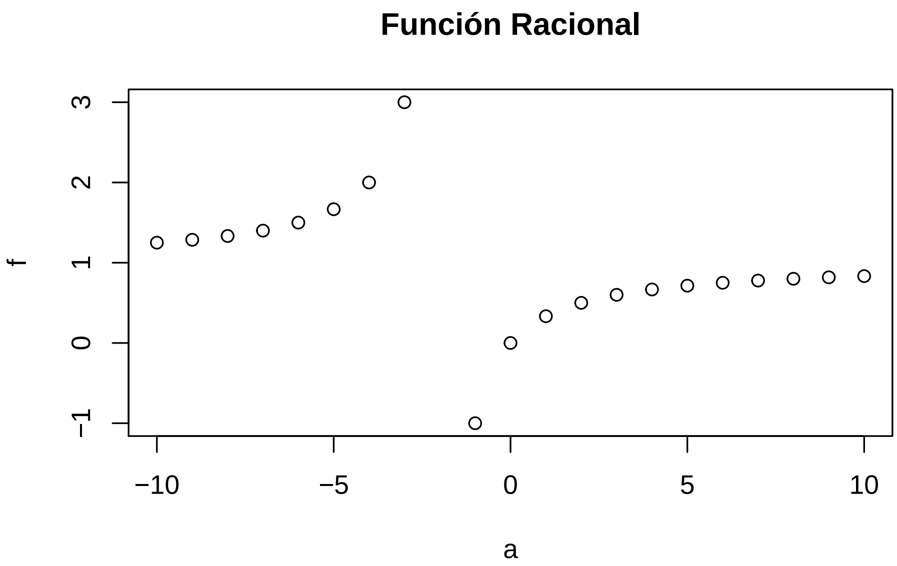
Es toda función que se puede expresarse como el cociente de dos funciones polinomiales.

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $Q(x) \neq 0$

- $Dom_f = \{x \in \mathbb{R} \therefore Q(x) \neq 0\}$

Ejemplo:

```
> a <- -10:10
> f <- ( a ) / ( a + 2 )
> plot(a,f,main="Función Racional")
```



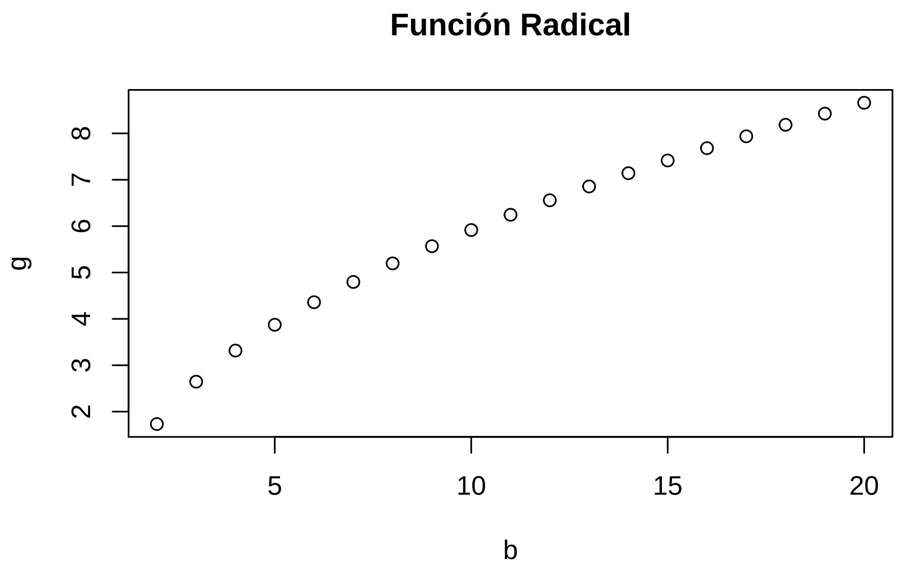
Funciones radicales

Es toda función de la forma $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, donde $g(x) \geq 0$

- $$Dom_f = \begin{cases} \text{Si } n \text{ es par, } \mathbb{R} - \{x \therefore g(x) < 0\} \cup \{ \text{ los } x \text{ que generen restricciones en el radicando}\} \\ \text{Si } n \text{ es impar, } \mathbb{R} - \{ \text{ los } x \text{ que generen restricciones en el radicando}\} \end{cases}$$

Ejemplo:

```
> b <- 2:20
> g <- sqrt (4*b - 5)
> plot(b,g,main="Función Radical")
>
```



1.4.2. Funciones trascendentales

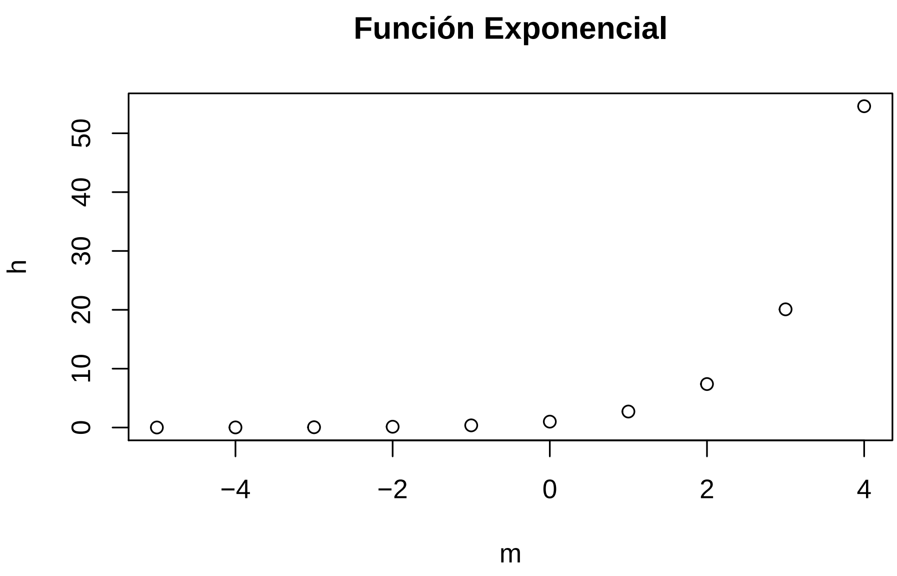
Función exponencial

Es una función de la forma $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 0$

- $Dom_f = \mathbb{R}$
- $Ran_f = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty\}$

Ejemplo:

```
> m <- -5:4
> h <- exp (m)
> plot(m,h,main="Función Exponencial")
>
```



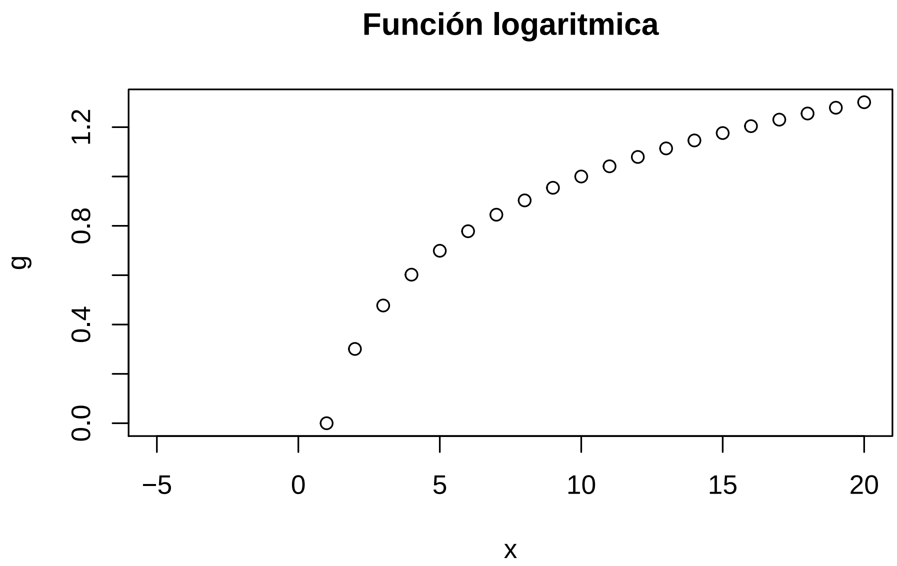
Función logarítmica

Es una función de la forma $f(x) = \log[a]x$, con $a > 0$ y $a \neq 0$

- $Dom_f = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty\}$
- $Ran_f = \mathbb{R}$

Ejemplo:

```
> x <- -5:20
> g <- log10 (x)
> plot(x,g,main="Función logaritmica")
```



Funciones trigonométricas

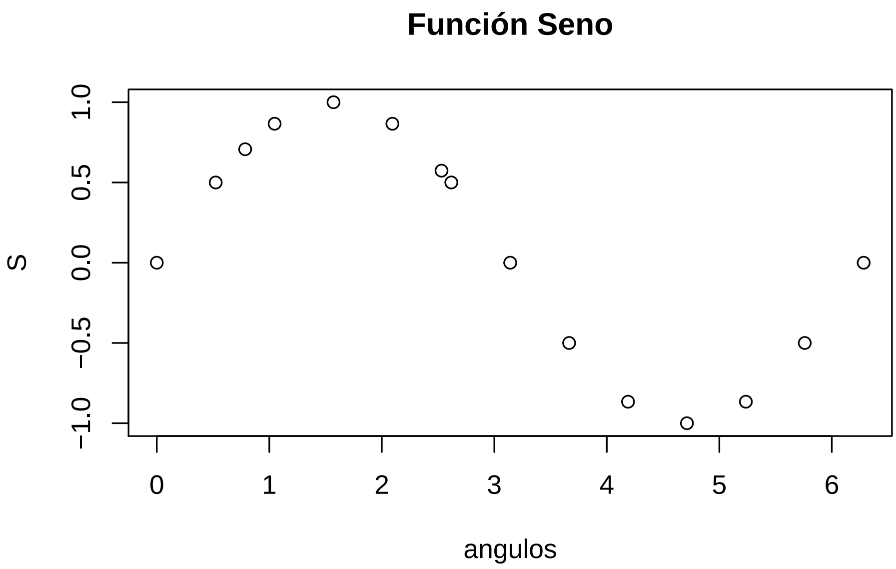
El siguiente cuadro resume las principales características de las funciones trigonométricas.

Cuadro 1.1: Dominio y Rango de las funciones Trigonométircas

Nombre	Dominio	Rango	Período	Clase de función
$f(x) = \text{sen x}$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π	Impar
$f(x) = \text{cos x}$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	π	Par
$f(x) = \text{tan x}$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2}(1 + 2k), k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	2π	Creciente impar
$f(x) = \text{csc x}$	$\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} - (-1, 1)$	2π	impar
$f(x) = \text{sec x}$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2}(1 + 2k), k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} - (-1, 1)$	2π	par
$f(x) = \text{cot x}$	$\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	2π	Decreciente impar

Ejemplo:

```
> angulos <- c(0,30,45,60,90,120,145,150,180,210,240,270,300,330,360)*(pi/180)
> S <- sin(angulos)
> plot(angulos,S,main="Función Seno")
```



1.4.3. Funciones especiales

Función a trozos

Una función formada por por la union de dos o mas funciones, cada una de ellas definida en intervalos disyuntos, recibe el nombre de **función segmentada** o **función a trozos**. en general se define como:

$$f(x) = \begin{cases} f(x)_1 \ , \text{Si } x \in I_1 \\ f(x)_2 \ , \text{Si } x \in I_2 \\ \vdots \ f(x)_n \ , \text{Si } x \in I_n \end{cases}$$

donde $I_1 \cap I_1 \cap \ldots \cap I_n = \emptyset$, es decir, los intervalos no poseen elementos comunes.

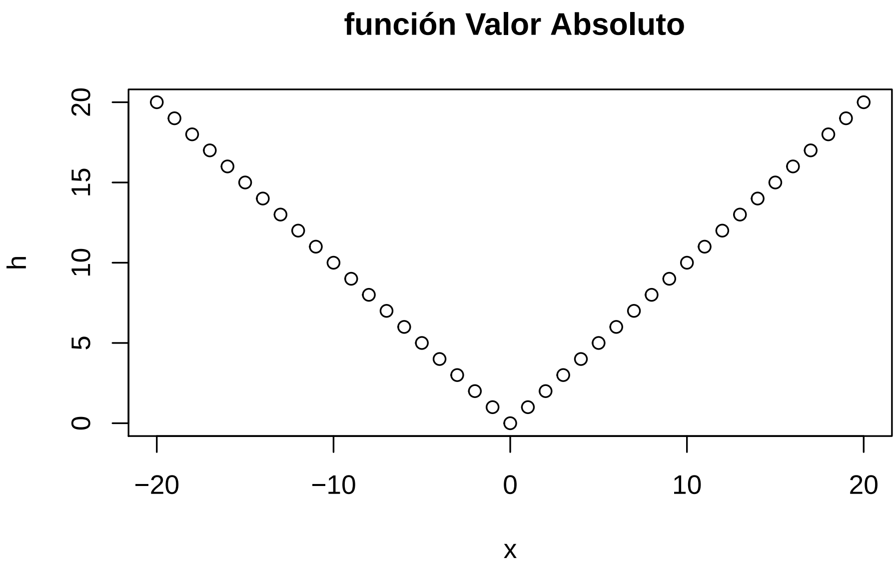
Función valor absoluto

La función **valor absoluto** es un caso particular de las funciones atrozos. Esta función asigna a cada elemento del dominio su valor absoluto, y está definida por:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \ , \text{Si } x \geq 0 \\ x \ , \text{Si } x < 0 \end{cases}$$

- $Dom_f = \mathbb{R}$
- $Ran_f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$

```
> x <- -20:20
> h <- abs(x)
> plot(x,h,main=" función Valor Absoluto")
>
```



Función parte entera

La función que asigna a cada elemento del dominio el mayor entero menor o igual que él, recibe el nombre de **función parte entera**. En simbolos,

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = n \text{ si } n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \leq x < n+1$$

Problemas 2.1

En los problemas 1 a 4, determine si las funciones dadas son iguales.

1. $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = x$

2. $G(x) = (\sqrt{x+1})^2$; $H(x) = x + 1$

*__3.__ $h(x) = \dfrac{|x|}{x}$; $k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$;
$g(x) = x - 1$

En los problemas 5 a 16, obtenga el dominio de cada función.

5. $f(x) = \dfrac{8}{x}$

6. $g(x) = \dfrac{x}{5}$

*__7.__ $h(x) = \sqrt{x - 3}$

8. $K(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z - 1}}$

9. $f(z) = 3z^2 + 2z - 4$

10. $H(x) = \dfrac{x}{x + 8}$

11. $f(x) = \dfrac{9x - 9}{2x + 7}$

12. $g(x) = \sqrt{4x + 3}$

13. $g(y) = \dfrac{4}{y^2 - 4y + 4}$

14. $\phi(x) = \dfrac{x + 5}{x^2 + x - 6}$

15. $h(s) = \dfrac{4 - s^2}{2s^2 - 7s - 4}$

16. $G(r) = \dfrac{2}{r^2 + 1}$

Determine los valores de la función para cada una de las funciones de los problemas 17 a 28.

17. $f(x) = 2x + 1$; $f(0)$, $f(3)$, $f(-4)$

18. $H(s) = 5s^2 - 3$; $H(4)$, $H(\sqrt{2})$, $H\left(\dfrac{2}{3}\right)$

19. $G(x) = 2 - x^2$; $G(-8)$, $G(u)$, $G(u^2)$

20. $F(x) = -5x$; $F(s)$, $F(t + 1)$, $F(x + 3)$

21. $\gamma(u) = 2u^2 - u$; $\gamma(-2)$, $\gamma(2v)$, $\gamma(x + a)$

22. $h(v) = \dfrac{1}{\sqrt{v}}$; $h(16)$, $h\left(\dfrac{1}{4}\right)$, $h(1 - x)$

23. $f(x) = x^2 + 2x + 1$; $f(1)$, $f(-1)$, $f(x + h)$

24. $H(x) = (x + 4)^2$; $H(0)$, $H(2)$, $H(t - 4)$

25. $k(x) = \dfrac{x - 7}{x^2 + 2}$; $k(5)$, $k(3x)$, $k(x + h)$

26. $k(x) = \sqrt{x - 3}$; $k(4)$, $k(3)$, $k(x + 1) - k(x)$

27. $f(x) = x^{4/3}$; $f(0)$, $f(64)$, $f\left(\dfrac{1}{8}\right)$

28. $g(x) = x^{2/5}$; $g(32)$, $g(-64)$, $g(t^{10})$

En los problemas 29 a 36 encuentre (a) $f(x + h)$ y (b) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$; simplifique sus respuestas.

29. $f(x) = 4x - 5$

30. $f(x) = \dfrac{x}{2}$

*__31.__ $f(x) = x^2 + 2x$

32. $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

33. $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$

34. $f(x) = x^3$

*__35.__ $f(x) = \dfrac{1}{x}$

36. $f(x) = \dfrac{x + 8}{x}$

37. Si $f(x) = 5x + 3$, encuentre $\dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h}$.

38. Si $f(x) = 2x^2 - x + 1$, encuentre $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

En los problemas 39 a 42, ¿es y una función de x? ¿Es x una función de y?

39. $9y - 3x - 4 = 0$

40. $x^2 + y = 0$

41. $y = 7x^2$

42. $x^2 + y^2 = 1$

*__43.__ La fórmula para el área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. ¿Es el área una función del radio?

44. Suponga que $f(b) = a^2b^3 + a^3b^2$. (a) Encuentre $f(a)$. (b) Encuentre $f(ab)$.

45. Valor de un negocio Un negocio cuyo capital original es de \$25 000, tiene ingresos y gastos semanales de \$6500 y \$4800, respectivamente. Si se conservan todas las utilidades, exprese el valor V del negocio al final de t semanas, como una función de t.

46. Depreciación Si una máquina de \$30 000 se deprecia 2% de su valor original cada año, determine una función f que exprese el valor V de la máquina después que han transcurrido t años.

47. Función de utilidad Cuando se venden q unidades de cierto producto (q es no negativa), la utilidad P está dada por la ecuación $P = 1.25q$. ¿Es P una función de q? ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

48. Función de demanda Suponga que la función de demanda anual para que cierto actor protagonice una película es $p = \dfrac{1\,200\,000}{q}$, donde q es el número de películas que protagoniza durante el año. Si el artista actualmente cobra \$600 000 por película, ¿cuántas protagoniza cada año? Si quiere protagonizar cuatro cintas por año, ¿cuánto cobrará por esto?

49. Función de oferta Suponga que la función de oferta semanal por una libra de café, la mezcla propia de un expendio local es $p = \frac{q}{48}$, donde q es el número de libras de café que se ponen en venta cada semana. ¿Cuántas libras semanales deben ofrecerse si el precio es de \$8.39 por libra? ¿Cuántas libras a la semana deben ofrecerse para su venta si el precio de cada una es de \$19.49? ¿Cómo cambia la oferta conforme el precio se incrementa?

50. Altas de un hospital Una compañía de seguros examinó los registros de un grupo de individuos hospitalizados por una enfermedad en particular. Se encontró que la proporción total de pacientes dados de alta al final de t días de hospitalización está dada por

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300+t}\right)^3$$

Evalúe (a) $f(0)$, (b) $f(100)$ y (c) $f(900)$. (d) ¿Al cabo de cuántos días se habrá dado de alta a la mitad ($1/2 = 0.500$) del grupo?

51. Psicología Se realizó un experimento para analizar la respuesta humana a las descargas eléctricas.[1] Los sujetos recibieron una descarga de cierta intensidad. Se les pidió que le asignaran una magnitud de 10, y la llamaron estímulo estándar. Después se les aplicaron otras descargas (estímulos) de varias intensidades. Para cada una de éstas, la respuesta R consistía en un número que indicaba la magnitud percibida de la descarga en relación con la del estímulo estándar. Se encontró que R era una función de la intensidad I de la descarga (I en microamperes) y se estimó mediante

$$R = f(I) = \frac{I^{4/3}}{2500} \qquad 500 \leq I \leq 3500$$

Evalúe (a) $f(1000)$ y (b) $f(2000)$. (c) Suponga que I_0 y $2I_0$ están en el dominio de f. Exprese $f(2I_0)$ en términos de $f(I_0)$. ¿Qué efecto sobre la respuesta tiene el hecho de duplicar la intensidad?

52. Psicología En un experimento de aprendizaje,[2] la probabilidad de una respuesta correcta como función del número n de intentos tiene la forma

$$P(n) = 1 - \frac{1}{2}(1-c)^{n-1} \qquad n \geq 1$$

donde el valor estimado de c es 0.344. Con el uso de este valor de c, determine $P(1)$ y $P(2)$.

***53. Programa de demanda** La tabla siguiente se conoce como un *programa de demanda,* y proporciona una correspondencia entre el precio p de un producto y la cantidad q que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) a ese precio. (a) Si $p = f(q)$, haga una lista con los números en el dominio de f. Encuentre $f(2900)$ y $f(3000)$. (b) Si $q = g(p)$, liste los números en el dominio de g. Encuentre $g(10)$ y $g(17)$.

Precio por unidad, p	**Cantidad de demanda por semana,** q
\$10	[illegible]
12	[illegible]
17	[illegible]
20	2000

En los problemas 54 a 57, utilice su calculadora para determinar los valores funcionales indicados para la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

54. $f(x) = 2.03x^3 - 5.27x^2 - 13.71$; (a) $f(1.73)$, (b) $f(-5.78)$, (c) $f(\sqrt{2})$

55. $f(x) = \dfrac{14.7x^2 - 3.95x - 15.76}{24.3 - x^3}$; (a) $f(4)$, (b) $f(-17/4)$, (c) $f(\pi)$

56. $f(x) = (20.3 - 3.2x)(2.25x^2 - 7.1x - 16)^4$; (a) $f(0.3)$, (b) $f(-0.02)$, (c) $f(1.9)$

57. $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}x^2 + 7.31(x+1)}{5.03}}$; (a) $f(12.35)$, (b) $f(-123)$, (c) $f(0)$

1.5. Álgebra de Funciones

Dado que las funciones que se trataran en este capitulo son de valor real, entonces podemos definir operaciones entre funciones al igual que en los números reales, esto es, suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones a este conjunto de operaciones le llamaremos *Álgebra de Funciones.*

Si f y g son funciones, entonces para cada x que esté en el dominio tanto de f como de g ,esto es, para $x \in Dom_f \cap Dom_g$, definimos las funciones $f+g$, $f-g$ y fg mediante las fórmulas

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x).$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

En cualquier punto de $x \in Dom_f \cap Dom_g$, en el cual $g(x) \neq 0$, podemos definir también la función f/g con la fórmula

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Las funciones también se pueden multiplicar por constantes: si c es un número real, entonces la función cf está definida $\forall x \in Dom_f$ mediante

$$(cf)(x) = cf(x).$$

La forma en que denotamos la función compuesta es un pequeño círculo entre las dos funciones, esto es, $(fog)(x) = f(g(x))$, que quiere decir que en primer lugar se aplica la función f, y al resultado la función g.

Se lee : *f compuesta g de x*

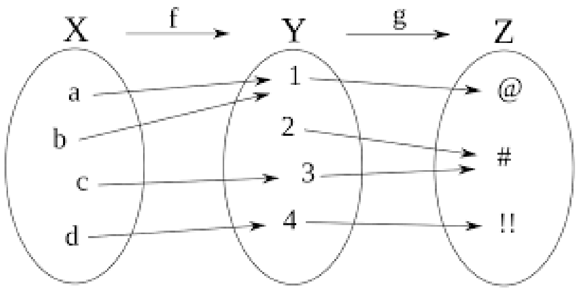


Figura 1.6: Diagrama sagital función compuesta

1. Si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x + 5$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f + g)(0)$ **(c)** $(f - g)(x)$

(d) $(fg)(x)$ **(e)** $(fg)(-2)$ **(f)** $\frac{f}{g}(x)$

(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(f \circ g)(3)$ **(i)** $(g \circ f)(x)$

(j) $(g \circ f)(3)$

2. Si $f(x) = 2x$ y $g(x) = 6 + x$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f - g)(x)$ **(c)** $(f - g)(4)$

(d) $(fg)(x)$ **(e)** $\frac{f}{g}(x)$ **(f)** $\frac{f}{g}(2)$

(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(g \circ f)(x)$ **(i)** $(g \circ f)(2)$

***3.** Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x^2 - x$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f - g)(x)$ **(c)** $(f - g)\left(-\frac{1}{2}\right)$

(d) $(fg)(x)$ **(e)** $\frac{f}{g}(x)$ **(f)** $\frac{f}{g}\left(-\frac{1}{2}\right)$

(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(g \circ f)(x)$ **(i)** $(g \circ f)(-3)$

4. Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 5$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f + g)\left(\frac{2}{3}\right)$ **(c)** $(f - g)(x)$

(d) $(fg)(x)$ **(e)** $(fg)(7)$ **(f)** $\frac{f}{g}(x)$

(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(f \circ g)(12\,003)$ **(i)** $(g \circ f)(x)$

5. Si $f(x) = 3x^2 + 6$ y $g(x) = 4 - 2x$, encuentre $f(g(2))$ y $g(f(2))$.

6. Si $f(p) = \frac{4}{p}$ y $g(p) = \frac{p-2}{3}$, encuentre $(f \circ g)(p)$ y $(g \circ f)(p)$.

***7.** Si $F(t) = t^2 + 7t + 1$ y $G(t) = \frac{2}{t-1}$, encuentre $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(t)$.

8. Si $F(t) = \sqrt{t}$ y $G(t) = 3t^2 + 4t + 2$, encuentre $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(t)$.

***9.** Si $f(v) = \frac{1}{v^2 + 1}$ y $g(v) = \sqrt{v + 2}$, encuentre $(f \circ g)(v)$ y $(g \circ f)(v)$.

10. Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$, encuentre $(f \circ f)(x)$.

En los problemas 11 a 16, determine las funciones f y g tales que $h(x) = f(g(x))$.

11. $h(x) = 11x - 7$

12. $h(x) = \sqrt{x^2 - 2}$

***13.** $h(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$

14. $h(x) = (9x^3 - 5x)^3 - (9x^3 - 5x)^2 + 11$

15. $h(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2 - 1}{x + 3}}$

16. $h(x) = \frac{2 - (3x - 5)}{(3x - 5)^2 + 2}$

17. Utilidad Cierto expendio de café vende una libra de café por \$9.75. Los gastos mensuales son \$4500 más \$4.25 por cada libra vendida.

(a) Escriba una función $r(x)$ para el ingreso mensual total como una función del número de libras vendidas.

(b) Escriba una función $e(x)$ para los gastos mensuales totales como una función del número de libras de café vendidas.

(c) Escriba una función $(r - e)(x)$ para la utilidad mensual total como una función del número de libras vendidas.

18. Geometría Suponga que el volumen de un cubo es $v(x) = (4x - 7)^3$. Exprese v como una composición de dos funciones, y explique qué representa cada función.

19. Negocios Un fabricante determina que el número total de unidades de producción por día, q, es una función del número de empleados, m, donde

$$q = f(m) = \frac{(40m - m^2)}{4}$$

El ingreso total, r, que se recibe por la venta de q unidades, está dado por la función g, donde $r = g(q) = 40q$. Determine $(g \circ f)(m)$. ¿Qué es lo que describe esta función compuesta?

20. Sociología Se han hecho estudios concernientes a la relación estadística entre posición social, educación e ingresos.[5] Se denota con S el valor numérico de la posición social, con base en el ingreso anual I. Para cierto tipo de población suponga

$$S = f(I) = 0.45(I - 1000)^{0.53}$$

[5] R. K. Leik y B. F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975).

Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

Proporcione el dominio de cada función de los problemas 1 a 6.

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 6x + 5}$
2. $g(x) = x^4 + 5|x - 1|$
3. $F(t) = 7t + 4t^2$
4. $G(x) = 18$
5. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$
6. $H(s) = \dfrac{\sqrt{s - 5}}{4}$

En los problemas 7 a 14, encuentre los valores de la función para la función dada.

7. $f(x) = 3x^2 - 4x + 7;\ f(0), f(-3), f(5), f(t)$
8. $h(x) = 7;\ h(4), h\left(\dfrac{1}{100}\right), h(-156), h(x + 4)$
9. $G(x) = \sqrt[4]{x - 3};\ G(3), G(19), G(t + 1), G(x^3)$
10. $F(x) = \dfrac{x - 3}{x + 4};\ F(-1), F(0), F(5), F(x + 3)$
11. $h(u) = \dfrac{\sqrt{u + 4}}{u};\ h(5), h(-4), h(x), h(u - 4)$
12. $H(s) = \dfrac{(s - 4)^2}{3};\ H(-2), H(7), H\left(\dfrac{1}{2}\right), H(x^2)$
13. $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 1 \\ 4 + x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases};$

    $f(4), f(-2), f(0), f(1)$
14. $f(q) = \begin{cases} -q + 1 & \text{si } -1 \le q < 0 \\ q^2 + 1 & \text{si } 0 \le q < 5 \\ q^3 - 99 & \text{si } 5 \le q \le 7 \end{cases};$

    $f\left(-\dfrac{1}{2}\right), f(0), f\left(\dfrac{1}{2}\right), f(5), f(6)$

En los problemas 15 a 18 encuentre (a) $f(x + h)$ y (b) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, simplifique sus respuestas.

15. $f(x) = 3 - 7x$
16. $f(x) = 11x^2 + 4$
17. $f(x) = 4x^2 + 2x - 5$
18. $f(x) = \dfrac{7}{x + 1}$
19. Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 2x + 3$, encuentre lo siguiente:
    - **(a)** $(f + g)(x)$
    - **(b)** $(f + g)(4)$
    - **(c)** $(f - g)(x)$
    - **(d)** $(fg)(x)$
    - **(e)** $(fg)(1)$
    - **(f)** $\dfrac{f}{g}(x)$
    - **(g)** $(f \circ g)(x)$
    - **(h)** $(f \circ g)(5)$
    - **(i)** $(g \circ f)(x)$
20. Si $f(x) = -x^2$ y $g(x) = 3x - 2$, determine lo siguiente:
    - **(a)** $(f + g)(x)$
    - **(b)** $(f - g)(x)$
    - **(c)** $(f - g)(-3)$
    - **(d)** $(fg)(x)$
    - **(e)** $\dfrac{f}{g}(x)$
    - **(f)** $\dfrac{f}{g}(2)$
    - **(g)** $(f \circ g)(x)$
    - **(h)** $(g \circ f)(x)$
    - **(i)** $(g \circ f)(-4)$

En los problemas 21 a 24, encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

21. $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ g(x) = x + 1$
22. $f(x) = \dfrac{x + 1}{4},\ g(x) = \sqrt{x}$
23. $f(x) = \sqrt{x + 2},\ g(x) = x^3$
24. $f(x) = 2,\ g(x) = 3$

En los problemas 25 y 26, encuentre las intersecciones de la gráfica de cada ecuación, y pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y, al origen y a $x = y$. No haga un bosquejo de las gráficas.

25. $y = 3x - x^3$
26. $\dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2 + 1} = 4$

En los problemas 27 y 28, encuentre las intersecciones con el eje x y con el eje y de la gráfica de cada ecuación. También examine la simetría con respecto al eje x, el eje y y al origen. Después haga un bosquejo de las gráficas.

27. $y = 9 -$ [illegible]
28. $y = 3x -$ [illegible]

En los problemas 29 a 32, trace la gráfica de cada función y proporcione su dominio y rango. También determine las intersecciones.

29. $G(u) = \sqrt{u + 4}$
30. $f(x) = |x| + 1$
31. $y = g(t) = \dfrac{2}{|t - 4|}$
32. $h(u) = \sqrt{-5u}$
33. Grafique la siguiente función definida por partes y proporcione su dominio y rango:

$$y = f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le 0 \\ 2 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

34. Utilice la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para hacer un bosquejo de la gráfica de $y = \sqrt{x - 2} - 1$.
35. Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para hacer un bosquejo de la gráfica de $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$.
36. **Ecuación de tendencia** Las ventas anuales proyectadas (en dólares) de un producto nuevo están dadas por la ecuación $S = 150\,000 + 3000t$, donde t es el tiempo en años, contados a partir de 2001. Tal ecuación se denomina *ecuación de tendencia*. Encuentre las ventas anuales proyectadas para 2006. ¿Es S una función de t?

CAPÍTULO 2

LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

2.1. Límite de una función

Ejemplo 2.1.

$$\lim_{x\to 5}(x+3)=8$$

Significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x , si $|x-5| < \delta$, entonces, $|(x+3)-8| < \epsilon$.

Ejemplo 2.2. Evalúe los siguientes límites.

1.
$$\lim_{x\to -12}(3x^2-7)$$

2.
$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

3.
$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2+25}{\sqrt{x^2+16}}\right)$$

Ejemplo 2.3. Si $f(x)=(x^2-9)/(x-3)$, evalúe

$$\lim_{x\to 3} f(x)$$

2.1.1. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Teorema 2.1. Si m, b y c son tres constantes cualesquiera, entonces,

$$\lim_{x\to c}(mx+b)=mc+b$$

Ejemplo 2.4. Tomando $m=2, b=3$ y $c=1$, obtenemos el resultado

$$\lim_{x\to 1}(2x+3)=2(1)+3=5$$

Ahora con $m = 1, b = 3$ y $c = 3$, tenemos que

$$\lim_{x \to 3}(2x+3) = 2(3)+3 = 9$$

Teorema 2.2. a)

$$\lim_{x \to c} bf(x) = b \lim_{x \to c} f(x)$$

b)

$$\lim_{x \to c}[f(x)]^n = [\lim_{x \to c} f(x)]^n$$

si $[f(x)]^n$ está definida en x cercano a $x = c$

Ejemplo 2.5.

$$\lim_{x \to 3} x^2 = [\lim_{x \to 3} x]^2 = 3^2 = 9$$

$$\lim_{x \to 1} 5(2x+3)^{-1} = 5[\lim_{x \to 1}(2x+3)]^{-1} = 5[(2(1)+3)]^{-1} = 5(5)^{-1} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x^2-9)^3}{12(x-3)^3} = \frac{1}{12}. \lim_{x \to 3} \left(\frac{(x^2-9)}{(x-3)} \right)^3$$

$$= \frac{1}{12}. \lim_{x \to 3}(x+3)^3 = \frac{1}{12}.(6)^3 = \frac{36}{2} = 18$$

Teorema 2.3. a)

$$\lim_{x \to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$$

b)

$$\lim_{x \to c}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$$

c)

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \left(\frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} \right)$$

con tal de que existan los límites del lado derecho y, en el caso C), el denominador del lado derecho sea distinto de cero.

Problemas 10.1

En los problemas 1 a 4, utilice la gráfica de f para estimar cada límite, si existe.

*1. La gráfica de f aparece en la figura 10.10.

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 2} f(x)$

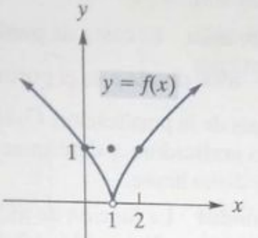


FIGURA 10.10 Diagrama para el problema 1.

2. La gráfica de f aparece en la figura 10.11.

(a) $\lim_{x\to -1} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 2} f(x)$

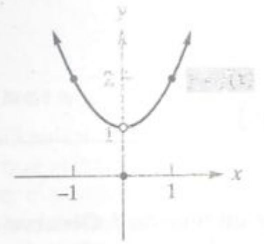


FIGURA 10.11 Diagrama para el problema 2.

*3. La gráfica de f aparece en la figura 10.12.

(a) $\lim_{x\to -1} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 2} f(x)$

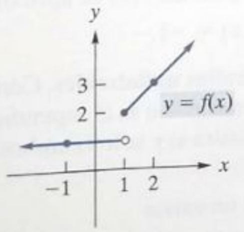


FIGURA 10.12 Diagrama para el problema 3.

4. La gráfica de f aparece en la figura 10.13.

(a) $\lim_{x\to -1} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 1} f(x)$

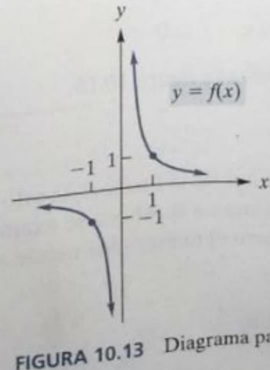


FIGURA 10.13 Diagrama para el problema 4.

En los problemas 5 a 8, utilice su calculadora para completar la tabla, y use los resultados para estimar el límite dado.

5. $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{x+1}$

x	-0.9	-0.99	-0.999	-1.001	-1.01	-1.1
$f(x)$						

6. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3}$

x	-3.1	-3.01	-3.001	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$						

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

8. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

h	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

Encuentre los límites en los problemas 9 a 34.

*9. $\lim_{x\to 2} 16$

10. $\lim_{x\to 3} 2x$

*11. $\lim_{t\to -5} (t^2-5)$

12. $\lim_{t\to 1/3} (5t-7)$

*13. $\lim_{x\to -2} (3x^3-4x^2+2x-3)$

14. $\lim_{r\to 9} \dfrac{4r-3}{11}$

*15. $\lim_{t\to -3} \dfrac{t-2}{t+5}$

16. $\lim_{x\to -6} \dfrac{x^2+6}{x-6}$

17. $\lim_{h\to 0} \dfrac{h}{h^2-7h+1}$

18. $\lim_{z\to 0} \dfrac{z^2-5z-4}{z^2+1}$

19. $\lim_{p\to 4} \sqrt{p^2+p+5}$

20. $\lim_{y\to 15} \sqrt{y+3}$

*21. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+2x}{x+2}$

22. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x+1}$

*23. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

24. $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^3+3t^2}{t^3-4t^2}$

25. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

26. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2-4}{t-2}$

27. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x}$

29. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-9x+20}{x^2-3x-4}$

30. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^4-81}{x^2+8x+15}$

31. $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2-x-10}{x^2+5x-14}$

32. $\lim_{x\to -4} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2+5x+4}$

33. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^2-2^2}{h}$

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^2-4}{x}$

*35. Encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$ trate a x como una constante.

36. Encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{3(x+h)\ \ +7(x+h)-3x^2-7x}{h}$ trate a x como una constante.

En los problemas 37 a 42, encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

37. $f(x)=7-3x$

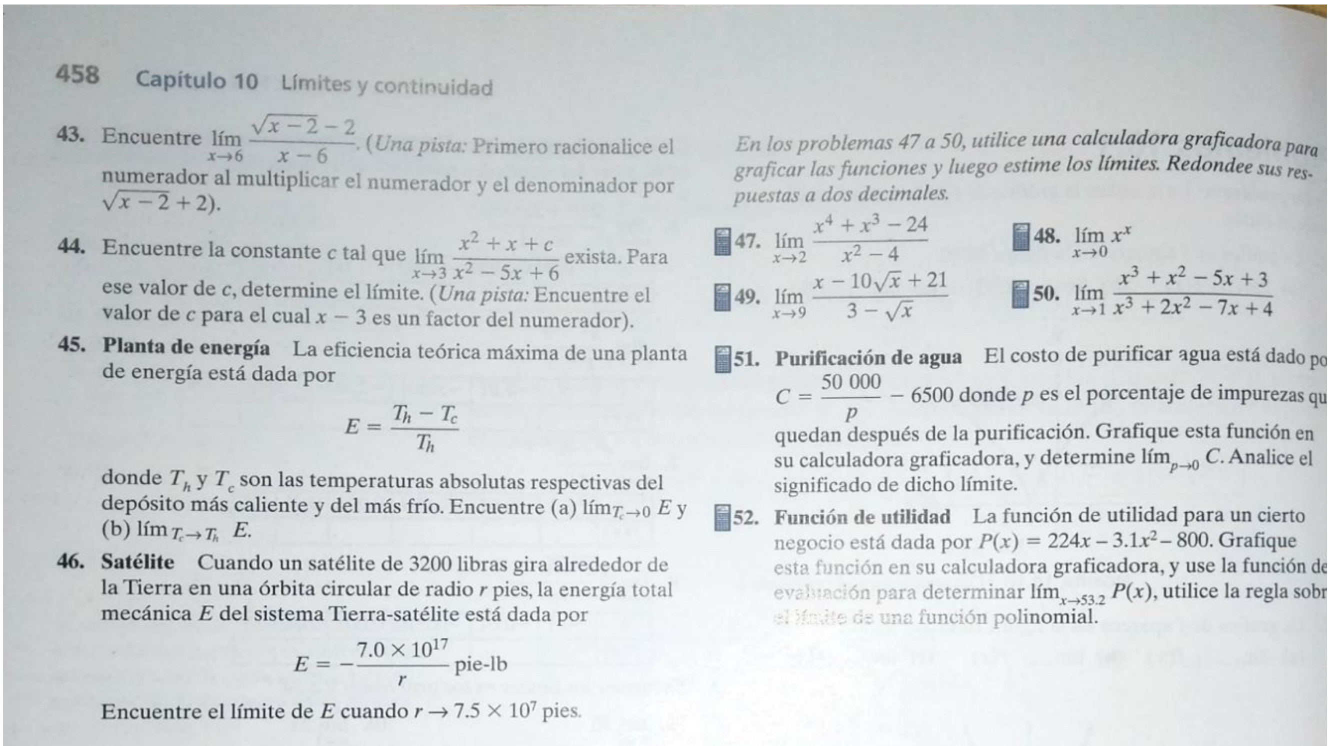
38. $f(x)=2x+3$

39. $f(x)=x^2-3$

40. $f(x)=x^2+x+1$

41. $f(x)=x^3-4x^2$

42. $f(x)=3-x+4x^2$



458 Capítulo 10 Límites y continuidad

43. Encuentre $\lim_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$. (*Una pista:* Primero racionalice el numerador al multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{x-2}+2$).

44. Encuentre la constante c tal que $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2+x+c}{x^2-5x+6}$ exista. Para ese valor de c, determine el límite. (*Una pista:* Encuentre el valor de c para el cual $x-3$ es un factor del numerador).

45. Planta de energía La eficiencia teórica máxima de una planta de energía está dada por

$$E = \frac{T_h - T_c}{T_h}$$

donde T_h y T_c son las temperaturas absolutas respectivas del depósito más caliente y del más frío. Encuentre (a) $\lim_{T_c\to 0} E$ y (b) $\lim_{T_c\to T_h} E$.

46. Satélite Cuando un satélite de 3200 libras gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r pies, la energía total mecánica E del sistema Tierra-satélite está dada por

$$E = -\frac{7.0\times 10^{17}}{r} \text{ pie-lb}$$

Encuentre el límite de E cuando $r \to 7.5\times 10^7$ pies.

En los problemas 47 a 50, utilice una calculadora graficadora para graficar las funciones y luego estime los límites. Redondee sus respuestas a dos decimales.

47. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4+x^3-24}{x^2-4}$

48. $\lim_{x\to 0} x^x$

49. $\lim_{x\to 9} \dfrac{x-10\sqrt{x}+21}{3-\sqrt{x}}$

50. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+2x^2-7x+4}$

51. Purificación de agua El costo de purificar agua está dado po $C = \dfrac{50\,000}{p} - 6500$ donde p es el porcentaje de impurezas qu quedan después de la purificación. Grafique esta función en su calculadora graficadora, y determine $\lim_{p\to 0} C$. Analice el significado de dicho límite.

52. Función de utilidad La función de utilidad para un cierto negocio está dada por $P(x) = 224x - 3.1x^2 - 800$. Grafique esta función en su calculadora graficadora, y use la función de evaluación para determinar $\lim_{x\to 53.2} P(x)$, utilice la regla sobr el límite de una función polinomial.

2.1.2. LÍMITES AL INFINITO

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un $M > 0$ correspondiente tal que, para todo $x > M$, entonces, $|f(x) - L| < \epsilon$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un $M > 0$ correspondiente tal que, para todo $x < N$, entonces, $|f(x) - L| < \epsilon$.

Límites al infinito de funciones racionales

Para determinar el límite de funciones racionales cuando primero dividimos el numerador y el denominador entre la potencia más alta de x en el denominador. De esta forma, el resultado depende de los grados de los polinomios que aparecen.

Una recta $y = b$ es una *asíntota horizontal* de la gráfica de una función $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

problemas 10.2

1. Para la función f dada en la figura 10.21, encuentre los límites siguientes. Si el límite no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

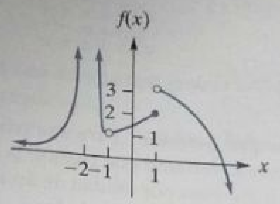


FIGURA 10.21 Diagrama para el problema 1.

(a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$
(b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$
(c) $\lim_{x\to 1} f(x)$
(d) $\lim_{x\to\infty} f(x)$
(e) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$
(f) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$
(g) $\lim_{x\to -2} f(x)$
(h) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$
(i) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$
(j) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$
(k) $\lim_{x\to -1} f(x)$

2. Para la función f dada en la figura 10.22, encuentre los límites siguientes. Si el límite no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

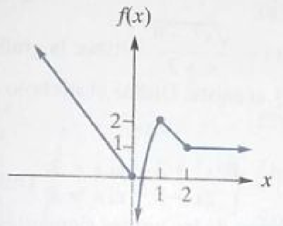


FIGURA 10.22 Diagrama para el problema 2.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$
(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$
(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$
(d) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$
(e) $\lim_{x\to 1} f(x)$
(f) $\lim_{x\to\infty} f(x)$
(g) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

En los problemas 3 a 54, encuentre el límite. Si no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

3. $\lim_{x\to 3^+} (x-2)$
4. $\lim_{x\to -1^+} (1-x^2)$
5. $\lim_{x\to -\infty} 5x$
6. $\lim_{x\to -\infty} 19$
7. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{6x}{x^4}$
8. $\lim_{x\to 2} \dfrac{7}{x-1}$
9. $\lim_{x\to -\infty} x^2$
10. $\lim_{t\to\infty} (t-1)^3$
11. $\lim_{h\to 0^+} \sqrt{h}$
12. $\lim_{h\to 5^-} \sqrt{5-h}$
13. $\lim_{x\to -2^-} \dfrac{-3}{x+2}$
14. $\lim_{x\to 0^-} 2^{1/2}$
15. $\lim_{x\to 1^+} (4\sqrt{x-1})$
16. $\lim_{x\to 2^+} \left(x\sqrt{x^2-4}\right)$
17. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+10}$
18. $\lim_{x\to -\infty} -\sqrt{1-10x}$
19. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x}}$
20. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-6}{5x\sqrt[3]{x}}$
*21. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+8}{x-3}$
22. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x-4}{3-2x}$
23. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-1}{x^3+4x-3}$
24. $\lim_{r\to\infty} \dfrac{r^3}{r^2+1}$
25. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{3t^3+2t^2+9t-1}{5t^2-5}$
26. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x}{3x^7-x^3+4}$
27. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{7}{2x+1}$
28. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2}{(4x-1)^3}$
29. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3-4x-2x^3}{5x^3-8x+1}$
30. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3-2x-2x^3}{7-5x^3+2x^2}$
*31. $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{x+3}{x^2-9}$
32. $\lim_{x\to -3^-} \dfrac{3x}{9-x^2}$
33. $\lim_{w\to\infty} \dfrac{2w^2-3w+4}{5w^2+7w-1}$
34. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4-3x^3}{x^3-1}$
35. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{6-4x^2+x^3}{4+5x-7x^2}$
36. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3x-x^3}{x^3+x+1}$
*37. $\lim_{x\to -3^-} \dfrac{5x^2+14x-3}{x^2+3x}$
38. $\lim_{t\to 3} \dfrac{t^2-4t+3}{t^2-2t-3}$
39. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+1}{x^2+1}$
40. $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x^3-x^2}{2x+1}$
41. $\lim_{x\to 1^+} \left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)$
42. $\lim_{x\to -\infty} -\dfrac{x^5+2x^3-1}{x^5-4x^2}$
43. $\lim_{x\to -7^-} \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-49}}$
44. $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{x}{\sqrt{16-x^4}}$
45. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{5}{x+x^2}$
46. $\lim_{x\to\infty} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
47. $\lim_{x\to 1} x(x-1)^{-1}$
48. $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{1}{2x-1}$
49. $\lim_{x\to 1^+} \left(\dfrac{-5}{1-x}\right)$
50. $\lim_{x\to 3} \left(-\dfrac{7}{x-3}\right)$
51. $\lim_{x\to 0} |x|$
52. $\lim_{x\to 0} \left|\dfrac{1}{x}\right|$
53. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{x}$
54. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{2x^2}{x^2+1}\right)$

En los problemas 55 a 58, encuentre los límites indicados. Si el límite no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

55. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$
(b) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$
(c) $\lim_{x\to 2} f(x)$
(d) $\lim_{x\to\infty} f(x)$
(e) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

56. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 2 \\ -2+4x-x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$
(b) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$
(c) $\lim_{x\to 2} f(x)$
(d) $\lim_{x\to\infty} f(x)$
(e) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

CAPÍTULO 3

DIFERENCIACIÓN (O DERIVACIÓN)

La derivada de una función f es la función que se denota por f' (y se lee “f prima”) que está definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(suponiendo que existe este límite). Si se puede evaluar $f'(x)$, se dice que f es *diferenciable* y a $f'(x)$ se le denomina derivada de f en x o la derivada de f con respecto a x. Al proceso de determinar la derivada se le denomina *diferenciación*.

Observación:

Además de $f'(x)$, otras notaciones para la derivada de $y = f(x)$ en x son:

$$\frac{dy}{dx} \text{(que se lee “derivada de } y \text{ respecto a } x\text{”)},$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \text{ (derivada de } f(x) \text{ respecto a } x\text{)},$$

$$y' \text{ (} y \text{ prima)},$$

Nota:

- $f'(x_1)$ es la pendiente de la tangente a $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$.

- Con la ayuda de

```
D(expression(), name)
D(quote(),name)
deriv(expression(), name,TRUE)
deriv3(expr, ...)
```

3.1. Reglas para la diferenciación

3.1.1. Derivadas de funciones polinómicas

1. **Funciones constantes**
   Si c es una constante, entonces
   $$\frac{d}{dx}[c] = 0$$
   Esto es, la derivada de una función constante es cero.

   Ejercicios
   Usar R para calcular la derivada de la función.

   a) $g(x) = 356$

   b) $h(x) = 3m$

   c) $f(x) = 9k^{20}$

   Sol:

```
> c <- expression(356)
> D(c,"x")
[1] 0
```

   $$\frac{d}{dx}[356] = 0$$

2. **Función idéntica**
   Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$.

   Ejercicios
   Usar R para calcular la derivada de la función.

   a) $g(x) = x$

   b) $f(m) = m$

   c) $h(k) = k$

   Sol:

3. **Función potencia**
   Si n es cualquier número real, entonces
   $$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$
   Suponiendo que x^{n-1} está definida.

   Ejercicios
   Usar R para calcular la derivada de la función.

   a) $g(m) = m^{16}$

   b) $f(x) = x^{-5}$

   c) $h(s) = s^{4/5}$

Sol:

4. **Derivada de una Función por una constante**
Si f es una función diferenciable y c es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

Es decir, la derivada de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función.

Ejercicios
Usar R para calcular la derivada de las funciones.

a) $g(t) = 2t$

b) $f(x) = 2x^3$

c) $h(s) = 12s^6$

Sol:

3.1.2. Derivadas de funciones con operaciones

5. **Derivada de la suma o resta**
Si f y g son funciones diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

Es decir, la derivada del a suma (o la diferencia) de dos funciones es la suma (o la diferencia) de sus derivadas.

Ejercicios
Usar R para calcular la derivada de las funciones.

a) $f(x) = x^3 - 4x + 5$

b) $g(x) = -\frac{x^4}{2} + 3x^3 - 2x$

c) $s = -16t^2 + 100$

Sol:

6. **Derivada del producto**
Si f y g son funciones diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

Ejercicios
Usar R para calcular la derivada de las funciones.

a) $g(m) = (3m - 2m^2)(5 + 4m)$

b) $h(t) = \sqrt{t}(1 - t^2)$

c) $f(x) = (x^2 - 1)^2$

Sol:

7. **Derivada del cociente**
Si f y g son funciones diferenciables y ademas $g(x) \neq 0$, entonces

$$\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$

Ejercicios
Usar para calcular la derivada de las funciones.

a) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

b) $f(x) = \dfrac{30}{x^2}$

c) $h(x) = \dfrac{x-5}{x+5}$

Sol:

3.1.3. Derivadas de funciones trascendentes

8. **Funciones trigonométricas**
Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = \cos x$, x en radianes.
Si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, x en radianes.
Si $f(x) = \tan x$, entonces $f'(x) = \sec^2 x$, x en radianes.
Si $f(x) = \cot x$, entonces $f'(x) = -\csc^2 x$, x en radianes.
Si $f(x) = \sec x$, entonces $f'(x) = \sec x \cdot \text{tanx}$,$x$ en radianes.
Si $f(x) = \csc x$, entonces $f'(x) = -\csc x \cdot \text{cotx}$,$x$ en radianes.

9. **Funciones logarítmicas**
Si $f(x) = \ln x$, entonces, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Si $f(x) = \log_a x$, $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces,$f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot lna}$

10. **Funciones exponenciales**
Si $f(x) = e^x$, entonces, $f'(x) = e^x$
Si $f(x) = a^x$, entonces, $f'(x) = a^x Lna$ función.

3.1.4. Derivadas de funciones compuestas

11. Si $h(x) = f(g(x))$, entonces $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

En los Problemas 1-54, diferencie las funciones.

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = (\frac{11}{13})^{4/5}$
3. $f(x) = 2$
4. $f(x) = 0{,}3x$

5. $f(x) = 8x^4$
6. $f(x) = \sqrt{3}x^{83/4}$

7. $g(w) = w^{-7}$.
8. $f(t) = 3t^{-2}$.
9. $f(x) = 4x^{-14/5}$.
10. $v(x) = x^{e}$.
11. $f(x) = 3x - 2$.
12. $f(w) = 5w - 7 \ln \frac{4}{5}$.
13. $f(p) = \frac{13p}{5} + \frac{7}{3}$.
14. $q(x) = \frac{5x + 2}{8}$.
15. $g(x) = 3x^2 - 5x - 2$.
16. $f(q) = 7q^2 - 7q + 3$.
17. $f(x) = 14x^3 - 6x^2 + 7x - e^3$.
18. $f(r) = -8r^3 + 9^{2/3}$
19. $f(q) = -3q^3 + \frac{9}{2}q^2 + 9q + 9$.
20. $f(x) = 100x^{-3} - 50x^{-1/2} + 10x - 1$.
21. $f(x) = 2x^{501} - 125x^{100} + 0.2x^{3.4}$.
22. $f(x) = 17 + 8x^{1/7} - 10x^{12} - 3x^{-15}$.
23. $f(x) = 2(13 - x^4)$.
24. $f(s) = 5(s^4 - 3)$.
25. $g(x) = \frac{13 - x^4}{3}$.
26. $f(x) = \frac{5(x^4 - 3)}{2}$.
27. $f(x) = x^{-4} - 9x^{1/3} + 5x^{-2/5}$.
28. $f(z) = 3z^{1/4} - 12^2 - 8z^{-3/4}$.
29. $h(x) = -2(27x - 14x^5)$.
30. $f(x) = \frac{-(1 + x - x^2 + x^3 + x^4 - x^5)}{2}$.
31. $f(x) = -2x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{x^4}{4} + 2$.
32. $p(x) = \frac{x^7}{7} + \frac{x}{2}$.
33. $f(x) = \frac{1}{x}$.
34. $f(x) = \frac{7}{x^3}$.
35. $f(s) = \frac{1}{4s^5}$.
36. $g(w) = \frac{2}{3w^3}$.
37. $f(t) = 4\sqrt{t}$.
38. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$.
39. $q(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$.
40. $f(x) = \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}$.
41. $f(x) = x(3x^2 - 7x + 7)$.
42. $f(x) = x^3(3x^6 - 5x^2 + 4)$.
43. $g(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{2}{t^2}$.
44. $f(x) = x\sqrt{x}$.
45. $f(x) = x^3(3x)^2$.
46. $f(x) = \sqrt{x}(5 - 6x + 3\sqrt[4]{x})$.
47. $v(x) = x^{-2/3}(x + 5)$.
48. $f(x) = x^{3/5}(x^2 + 7x + 1)$.
49. $f(q) = \frac{4q^3 + 7q - 4}{q}$.
50. $f(w) = \frac{w - 5}{w^5}$.
51. $f(x) = (x + 1)(x + 3)$.
52. $f(x) = x^2(x - 2)(x + 4)$.
53. $w(x) = \frac{x^2 + x^3}{x^2}$.
54. $f(x) = \frac{7x^3 + x}{2\sqrt{x}}$.

Para cada una de las curvas de los Problemas **55-58**, *determine las pendientes en los puntos que se señalan.*

55. $y = 3x^2 + 4x - 8$; $(0, -8)$, $(2, 12)$, $(-3, 7)$.
56. $y = 5 - 6x - 2x^3$; $(0, 5)$, $(\frac{3}{2}, -\frac{43}{4})$, $(-3, 77)$.
57. $y = 4$; cuando $x = -4$, $x = 7$, $x = 22$.
58. $y = 2x - 3\sqrt{x}$; cuando $x = 1$, $x = 16$, $x = 25$.

3.2. La derivada como tasa de variación (aplicaciones)

- La variación de x se expresa como $\Delta x = x_f - x_i$ y la tasa media de variación de x con respecto a t se expresa
$$V_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

- para una ecuación de movimiento rectilíneo de la forma $x = f(t)$, la velocidad V en el tiempo t está dada por
$$V = f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

- La **función de costo total** de un fabricante $c = f(q)$ da el costo total c de fabricar y vender q unidades de un producto. La tasa de cambio de c con respecto a q se denomina **costo marginal**. En consecuencia,
$$\textbf{costo marginal} = \frac{dc}{dq}$$

- Si c es el **costo total** de fabricar q unidades de un producto, entonces el **costo promedio** por unidad, $\bar{c}$, es
$$\bar{c} = \frac{c}{q}$$

 Supongásc que $r = f(q)$ es la función del ingreso total para un fabricante. La ecuación $r = f(q)$ establece que el valor total en unidades monetarias que se recibe por la venta de q unidades de un producto es r. El ingreso marginal se define como la tasa de variación del valor total que se recibe con respecto al número total de unidades que se vende. Por consiguiente.

- el **ingreso marginal** es simplemente la derivada de r con respecto a q.
$$\textbf{ingreso marginal} = \frac{dr}{dq}$$

- **La tasa relativa de variación** de $f(x)$ es
$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

- **La tasa porcentual de variación relativa** de $f(x)$ es
$$\frac{f'(x)}{f(x)}100$$

Ejemplo 3.1. Determinar las tasas relativa y porcentual de variación de $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 25$ cuando $x = 5$.

Ejemplo 3.2. Si la ecuación de demanda para el producto de un fabricante es $p = \dfrac{1000}{(q+5)}$,hallar la función de ingreso marginal y evaluarla cuando $q = 45$.

El ingreso r que se obtiene por la venta de q unidades es

$$ingreso = (precio)(cantidad),$$

$$r = pq$$

Sol: Esto significa que vender una unidad adicional por encima de 45 da como resultado aproximadamente 2 más en ingreso.

72. $y = ln(\sqrt{xe^{2x}})$

```
> y <- expression(x*exp(log(x^2)))
> D(y,"x")
```

```
exp(log(x^2)) + x * (exp(log(x^2)) * (2 * x/x^2))
```

74.

```
> y <- expression(x*exp(x)/log(x^2))
> D(y,"x")
```

```
(exp(x) + x * exp(x))/log(x^2) - x * exp(x) * (2 * x/x^2)/log(x^2)^2
```

79.

```
> y <- expression(x^2*exp(sin (x)))
> D(y,"x")
```

```
2 * x * exp(sin(x)) + x^2 * (exp(sin(x)) * cos(x))
```

80.

```
> y <- expression(log((sin(x))^3)/x)
> D(y,"x")
```

```
3 * (cos(x) * (sin(x))^2)/(sin(x))^3/x - log((sin(x))^3)/x^2
```

58.

```
> y <- expression((exp(x)^(1/4)))
> D(y,"x")
```

```
exp(x)^((1/4) - 1) * ((1/4) * exp(x))
```

57.

```
> y <- expression((exp(x)^(1/3)))
> D(y,"x")
```

```
exp(x)^((1/3) - 1) * ((1/3) * exp(x))
```

51.

```
> y <- expression((b/2)*(exp(2*x/b) - exp(2*x/b) ))
> D(y,"x")
```

```
(b/2) * (exp(2 * x/b) * (2/b) - exp(2 * x/b) * (2/b))
```

EJERCICIOS

En cada uno de los Problemas **1-6**, *se presenta una ecuación de movimiento. Para el valor dado de t, halle (a) la posición y (b) la velocidad. Supóngase que t está en segundos y s en metros.*

1. $s = t^2 - 3t;\quad t = 4.$

2. $s = \frac{1}{2}t + 1;\quad t = 2.$

3. $s = 2t^3 + 6;\quad t = 1.$

4. $s = -3t^2 + 2t + 1;\quad t = 1.$

5. $s = t^4 - 2t^3 + t;\quad t = 2.$

6. $s = t^4 - t^{5/2};\quad t = 0.$

7. Algunos sociólogos estudiaron la relación entre los ingresos y el número de años de educación para los miembros de un grupo urbano específico. Descubrieron que se puede esperar que una persona con x años de educación antes de buscar empleo constante reciba un ingreso anual promedio de y dólares por año, en donde

$$y = 4x^{5/2} + 4900, \qquad 4 \leq x \leq 16.$$

Halle la tasa de cambio de los ingresos con respecto al número de años de educación. Evalúela cuando $x = 9$.

8. Obtenga la tasa de cambio del área A de un círculo con respecto a su radio r si $A = \pi r^2$. Evalúela cuando $r = 3$ pulgadas.

9. La temperatura aproximada T de la piel en términos de la temperatura T_e del ambiente, está dada por

$$T = 32.8 + 0.27(T_e - 20),$$

en donde T y T_e están en grados Celsius*. Determine la tasa de cambio de t con respecto a T_e.

10. El volumen V de una célula esférica está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, en donde r es el radio. Halle la tasa de cambio del volumen con respecto al radio cuando $r = 6.5 \times 10^{-4}$ cm.

En los Problemas **11-16**, *se presentan funciones de costo en las que c es el costo de fabricar q unidades de un producto. En cada caso, halle la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal al valor o valores dados de q?*

11. $c = 500 + 10q;\quad q = 100.$

12. $c = 5000 + 6q;\quad q = 36.$

13. $c = 0.3q^2 + 2q + 850;\quad q = 3.$

14. $c = 0.1q^2 + 3q + 2;\quad q = 3.$

15. $c = q^2 + 50q + 1000;\quad q = 15, q = 16, q = 17.$

16. $c = 0.03q^3 - 0.6q^2 + 4.5q + 7700;\quad q = 10, q = 20, q = 100.$

En los Problemas **17-20**, *$\bar{c}$ representa el costo promedio por unidad, que es función del número q de unidades fabricadas. Obtenga la función de costo marginal y el costo marginal para los valores señalados de q.*

17. $\bar{c} = 0.01q + 5 + \dfrac{500}{q};\quad q = 50, q = 100.$

18. $\bar{c} = 2 + \dfrac{1000}{q};\quad q = 25, q = 235.$

19. $\bar{c} = 0.00002q^2 - 0.01q + 6 + \dfrac{20{,}000}{q};\quad q = 100, q = 500.$

20. $\bar{c} = 0.001q^2 - 0.3q + 40 + \dfrac{7000}{q};\quad q = 10, q = 20.$

En los Problemas **21-24**, *r representa los ingresos totales y es función del número de unidades vendidas, q. Determine la función de ingreso marginal y el ingreso marginal para los valores que se señalan de q.*

21. $r = 0.7q;\quad q = 8, q = 100, q = 200.$

22. $r = q(15 - \frac{1}{30}q);\quad q = 5, q = 15, q = 150.$

23. $r = 250q + 45q^2 - q^3;\quad q = 5, q = 10, q = 25.$

En los Problemas **1-42,** *diferencie las funciones.*

1. $f(x) = (4x + 1)(6x + 3)$.

2. $f(x) = (3x - 1)(7x + 2)$.

3. $s(t) = (8 - 7t)(t^2 - 2)$.

4. $Q(x) = (5 - 2x)(x^2 + 1)$.

5. $f(r) = (3r^2 - 4)(r^2 - 5r + 1)$.

6. $C(I) = (2I^2 - 3)(3I^2 - 4I + 1)$.

7. $y = (x^2 + 3x - 2)(2x^2 - x - 3)$.

8. $y = (2 - 3x + 4x^2)(1 + 2x - 3x^2)$.

9. $f(w) = (8w^2 + 2w - 3)(5w^3 + 2)$.

10. $f(x) = (3x - x^2)(3 - x - x^2)$.

11. $y = (x^2 - 1)(3x^3 - 6x + 5) - (x + 4)(4x^2 + 2x + 1)$.

12. $h(x) = 4(x^5 - 3)(2x^3 + 4) + 3(8x^2 - 5)(3x + 2)$.

13. $f(p) = \frac{3}{2}(\sqrt{p} - 4)(4p - 5)$.

14. $g(x) = (\sqrt{x} - 3x + 1)(\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{x})$.

15. $y = 7 \cdot \frac{2}{3}$.

16. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

17. $y = (2x - 1)(3x + 4)(x + 7)$.

18. $y = \dfrac{2x - 3}{4x + 1}$.

19. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$.

20. $f(x) = \dfrac{-2x}{1 - x}$.

21. $y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$.

22. $h(w) = \dfrac{3w^2 + 5w - 1}{w - 3}$.

23. $h(z) = \dfrac{5 - 2z}{z^2 - 4}$.

24. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x^2 + x + 1}$.

25. $y = \dfrac{8x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x}$.

26. $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$.

27. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 3x + 2}$.

28. $F(z) = \dfrac{z^4 + 4}{3z}$.

29. $g(x) = \dfrac{1}{x^{100} + 1}$.

30. $y = \dfrac{3}{7x^3}$.

31. $u(v) = \dfrac{v^5 - 8}{v}$.

32. $y = \dfrac{x - 5}{2\sqrt{x}}$.

33. $y = \dfrac{3x^2 - x - 1}{\sqrt[3]{x}}$

34. $y = \dfrac{x^{8.3} - 2}{2x^{2.1} + 1}$.

35. $y = 7 - \dfrac{4}{x - 8} + \dfrac{2x}{3x + 1}$.

36. $q(x) = 13x^2 + \dfrac{x - 1}{2x + 3} - \dfrac{4}{x}$.

37. $y = \dfrac{x - 5}{(x + 2)(x - 4)}$.

38. $y = \dfrac{(2s - 1)(3x + 2)}{4 - 5x}$.

39. $s(t) = \dfrac{t^2 + 3t}{(t^2 - 1)(t^3 + 7)}$.

40. $f(s) = \dfrac{17}{s(5s^2 - 10s + 4)}$.

41. $y = 3x - \dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x-1}}{x-2}$.

42. $y = 7 - 10x^2 + \dfrac{1 - \dfrac{7}{x^2+3}}{x+2}$.

43. Halle la pendiente de la curva $y = (4x^2 + 2x - 5)(x^3 + 7x + 4)$ en $(-1, 12)$.

44. Halle la pendiente de la curva $y = \dfrac{x^3}{x^4 + 1}$ en $(1, \frac{1}{2})$.

En los Problemas **45-48,** *obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.*

45. $y = \dfrac{6}{x-1}$; $(3, 3)$.

46. $y = \dfrac{4x+5}{x^2}$; $(-1, 1)$.

47. $y = (2x + 3)[2(x^4 - 5x^2 + 4)]$; $(0, 24)$.

48. $y = \dfrac{x+1}{x^2(x-4)}$; $(2, -\frac{3}{8})$.

En los Problemas **49 y 50,** *determine la tasa relativa de cambio de y con respecto a x para el valor dado de x.*

49. $y = \dfrac{x}{2x-6}$; $x = 1$.

50. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$; $x = 5$.

En los Problemas **51-54,** *cada ecuación representa una función de demanda para cierto producto, en donde p denota precio por unidad, y q, unidades. Encontrar la función marginal de ingresos en cada caso. Recuérdese que ingresos = pq.*

51. $p = 25 - 0.02q$.

52. $p = 500/q$.

53. $p = \dfrac{108}{q+2} - 3$.

54. $p = \dfrac{q + 750}{q + 50}$.

55. Para Estados Unidos (en 1922-1942) la función de consumo se estimó mediante*

$$C = 0.672I + 113.1.$$

Halle la propensión marginal al consumo.

56. Repita el Problema 55 si $C = 0.712I + 95.05$ para Estados Unidos, en 1929-1941.*

En los Problemas **57-60,** *cada ecuación representa una función de consumo. Obtenga la propensión marginal al consumo y la propensión marginal al ahorro para el valor dado de I.*

57. $C = 2 + 2\sqrt{I}$; $I = 9$.

58. $C = 6 + \dfrac{3I}{4} - \dfrac{\sqrt{I}}{3}$; $I = 25$.

59. $C = \dfrac{16\sqrt{I} + 0.8\sqrt{I^3} - 0.2I}{\sqrt{I} + 4}$; $I = 36$.

60. $C = \dfrac{20\sqrt{I} + 0.5\sqrt{I^3} - 0.4I}{\sqrt{I} + 5}$; $I = 100$.

61. Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2}{q+3} + 5000,$$

determine la función de costo marginal.

62. En un análisis de las prestaciones de seguridad social, Felstein† diferencia una función de la forma

$$f(x) = \frac{a(1+x) - b(2+n)x}{a(2+n)(1+x) - b(2+n)x},$$

en donde *a*, *b* y *n* son constantes. Determina que

$$f'(x) = \frac{-(1+n)ab}{[a(1+x) - bx]^2(2+n)}.$$

Verifique lo anterior. (*Sugerencia:* Por conveniencia, sea $2 + n = c$.)

63. Para una relación específica entre anfitrión y parásito, se determinó que cuando la densidad de los anfitriones (números de anfitriones por unidad de área) es *x*, el número de ellos que están parasitados

Utilice la definición de derivada para encontrar cada una de las siguientes.

1. $y = x^2 + 5$.

2. $C = 7 + 2q - 3q^2$.

3. $f(x) = \sqrt(x + 2)$.

Halle una ecuación de la recta tangente u la curva en el punto dado.

4. $y = x + 4; (3, 7)$.

5. $y = 3x^2 + 3x - 4; (-1, -4)$.

6. $f(x) = \dfrac{3}{x+1}; (2, 1)$.

se presentan función de costo en las que c es el costo de fabricas 4 unidades de un producto. En cada caso, halle la ,función de costo marginal. ¿ Cuál es el costo marginal y promedio al valor o valores dados de q?

7. $c = 500 + 10q; q = 100$.
8. $c = 0{,}03q^3 - 0{,}6q_2 + 4{,}5q + 7700; q = 10, q = 20, q = 100$
9. $r = 2q(30 - 0.lq); q = 10, 4 = 20$.